

C R O N O S  
F I N A N C E

Rééquilibrage de Portefeuille :  
Théorie, Simulations, et Données Réelles





# Rééquilibrage de Portefeuille : Théorie, Simulations, et Données Réelles

**Rim El Bernoussi et Michael Rockinger**

Mars 2020

---



# Rééquilibrage de Portefeuille : Théorie, Simulations, et Données Réelles

Rim El Bernoussi<sup>a</sup> et Michael Rockinger<sup>b</sup>

Mars 2020

## Abstract

Si la communauté financière s'accorde à dire que l'allocation d'actif est le principal moteur de performance, force est de constater que cette étape du processus d'investissement est par trop négligée dans la pratique. Nous avons donc voulu faire un état des lieux des stratégies de rééquilibrage et approfondir la question en y amenant une contribution novatrice et pragmatique : novatrice de par l'algorithme développé et le spectre de facteurs analysés; pragmatique de par l'intégration de coûts de transaction et la mise en oeuvre pratique qui en découle dans la gestion d'un portefeuille.

L'objectif du rééquilibrage est de maintenir la répartition d'actif cible et, par conséquent, de maintenir les caractéristiques de risque du portefeuille en ligne avec celle de l'investisseur. Cette gestion de nature *contrarian* force le gestionnaire à acheter des titres lorsque leurs prix baissent (moyenner) et à les vendre lorsqu'ils augmentent (prendre les bénéfices). La stratégie de rééquilibrage permet donc de limiter les biais comportementaux et d'exercer un réel contrôle du risque. Cependant, cette stratégie peut impliquer un nombre de transactions, et donc des coûts, importants.

Entre maximisation des bénéfices et minimisation des coûts, la stratégie de rééquilibrage doit être initialement définie de manière optimale.

Notre analyse propose d'inventorier les différents éléments à prendre à compte. En effet, nous commençons par exposer, d'un point de vue théorique, les différentes causes pouvant affecter la performance et le risque d'une stratégie de rééquilibrage. Nous retrouvons, *inter alia*, les conditions de marché et les caractéristiques propres à chaque actif ainsi que celles des portefeuilles globaux. Nous analysons les implications de ces dernières grâce à différentes simulations et comparons les résultats.

Finalement, nous considérons un portefeuille modèle suisse avec des données réelles, composé d'un actif sans risque, d'obligations et de divers indices boursiers. Les différentes stratégies (rééquilibrage vs *Buy and Hold*) sont testées sur une période de près de dix-sept ans, entre 1999 et 2016. Les résultats nous permettent de valider, de manière empirique, la partie théorique et de montrer l'importance du rééquilibrage.

**Mots-clés :** Rééquilibrage de portefeuille, Trading dynamique, Allocation de portefeuille, *Buy and Hold*, *Fixed-weight*, Coûts de transaction.

**JEL :** G11, G15, C61, C63.

---

a, Cronos Finance, Pully, Suisse. E-mail : R.Elbernoussi@cronosfinance.ch.

b, HEC Lausanne, Université de Lausanne, Suisse. E-mail : Michael.Rockinger@unil.ch.

# 1 Introduction

Les portefeuilles d'investissement contiennent généralement des actifs risqués dont la valeur fluctue dans le temps. Par conséquent, le poids de ces actifs dans le portefeuille varie également dans le temps et peut différer considérablement de l'allocation initiale. Une pratique courante pour contrer ces changements est le rééquilibrage de portefeuille. Une stratégie de rééquilibrage largement utilisée est la stratégie à pondération fixe *Fixed-weight* (stratégie FW). Elle consiste à acheter les actifs lorsque leurs prix baissent et les vendre lorsqu'ils augmentent afin de rétablir l'allocation initiale. Cette stratégie de rééquilibrage est donc une stratégie contrarienne. L'objectif principal du rééquilibrage est de maintenir les caractéristiques de risque du portefeuille conformes à la tolérance de l'investisseur. Les investisseurs institutionnels tels que les fonds de pension peuvent par exemple rééquilibrer leurs portefeuilles afin de revenir à leurs politiques initiales d'allocation stratégique à long terme.

Toutefois, comme les stratégies de rééquilibrage impliquent la vente d'une partie des actifs les plus performants et l'investissement dans les moins bons, il est très difficile de déterminer si les stratégies de rééquilibrage génèrent une performance supérieure par rapport à la stratégie *Buy and Hold* (stratégie BH), qui consiste à ne pas intervenir sur le portefeuille et laisser les poids varier.

Une littérature académique abondante s'est concentrée sur la comparaison des deux stratégies FW et BH, mais les conclusions diffèrent en fonction, *inter alia*, de l'horizon de temps et de l'univers d'investissement ainsi que des coûts de transaction. Parmi ces articles figurent notamment *Tsai (2001)*, *Boulier et Leclerc (2000)*, *Harjoto et Jones (2006)*, ainsi que *Tokat et Wicas (2007)*.

L'une des études les plus importantes sur le sujet est celle de *Perold et Sharpe (1988)* qui compare la stratégie *Buy and Hold* à trois différentes stratégies de rééquilibrage. Les résultats indiquent que les stratégies de rééquilibrage présentent un potentiel de hausse plus faible que les stratégies BH sur un marché haussier et persistant, et moins de protection contre les risques de baisse, mais qu'elles présentent de meilleurs résultats dans les marchés oscillants.

Cependant, cette étude néglige les coûts de transaction qui sont un élément important à prendre en compte dans les stratégies de rééquilibrage (voir par exemple *Arnott et Lovell (1993)*, *Donohue et Yip (2003)*, *Sun et al. (2006)* et *Dybvig et Pezzo (2019)*). La plupart de ces études s'accordent sur le fait que les coûts de transaction peuvent être la cause principale de la sous-performance de la stratégie FW par rapport à BH. Il est également démontré que les coûts de transaction impliquent un intervalle d'inaction autour de l'allocation cible dans lequel il n'est pas optimal d'effectuer de transactions (voir par exemple *Leland et al. (1996)* et *Holden et*

*Holden (2013)*). Cet intervalle signifie que le portefeuille est seulement rééquilibré lorsque le poids des actifs varie en dehors des marges.

Dans cette étude, nous déterminons sous quelles conditions le couple rendement/risque (via le ratio de Sharpe) d'une stratégie FW est supérieur à celui d'une stratégie BH lorsque les coûts de transaction sont intégrés. Notre première contribution consiste à introduire une méthodologie permettant d'intégrer des coûts de transaction proportionnels. Cette méthodologie est facile à mettre en œuvre et peut être étendue aux portefeuilles multi-actifs. Néanmoins, à ce stade, cette méthodologie est limitée aux portefeuilles de moins de 20 actifs. Notre deuxième contribution consiste à présenter une méthodologie permettant de générer des séries de rendements autocorrélées, univariées ou multivariées, de manière à ce que la moyenne géométrique de ces derniers donne la valeur attendue et l'écart type. Cette contribution nous permet de tenir compte de la variance du portefeuille et donc de la volatilité. Comme le montre *Qian (2019)*, négliger cet aspect peut conduire à une classification erronée des allocations FW et BH. Nous démontrons également comment un intervalle d'inaction autour du poids cible peut être déterminé en fonction d'un modèle de prévision.

Enfin nous étudions l'importance relative de ces différents aspects dans diverses simulations. Nous montrons que la stratégie BH domine la stratégie de rééquilibrage pour un portefeuille modèle à deux actifs, sauf dans les cas où leurs corrélations, tant à travers le temps que dans la section transversale, sont significativement négatives. Ces simulations corroborent donc de manière quantitative les résultats théoriques. Ensuite, nous validons notre méthode avec les données réelles d'un portefeuille représentatif d'un fonds de pension suisse doté d'actifs sans risque, d'obligations et de plusieurs indices boursiers, sur une période allant du 1er janvier 1999 au 1er septembre 2016.

Dans la section 2, nous présentons certains résultats théoriques pour la comparaison des deux stratégies FW et BH. Les différentes expériences de simulation sont présentées dans la section 3 sur plusieurs types de portefeuilles : avec et sans actifs sans risque mais également avec plusieurs actifs risqués. Le choix des simulations est basé sur les aspects théoriques présentés à la précédente section, qui fournit des indications sur la manière de choisir les paramètres simulés. Enfin, nous présentons dans la section 4 les résultats des *backtesting* effectués grâce aux données réelles.

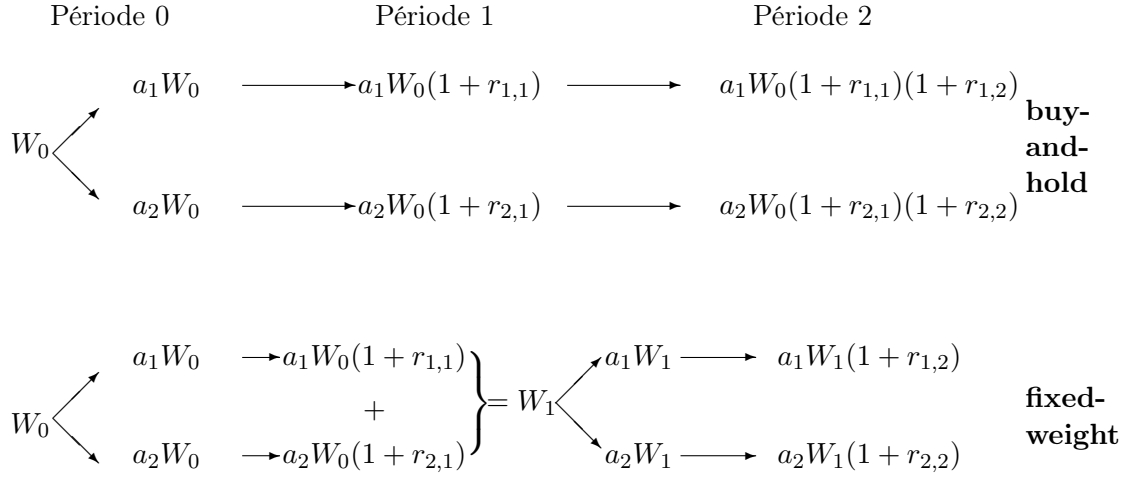
## 2 Aspects théoriques

Dans cette section, nous étudions les conséquences de l'intégration des coûts de transaction dans diverses stratégies d'investissement. La majorité de nos développements découle du travail de *Qian (2019)*. Avant tout, définissons les deux stratégies utilisées dans cette étude :

- La stratégie *Buy and Hold* (BH) est une stratégie d'investissement passive dans laquelle un investisseur achète des actifs et les conserve sur le long terme quelles que soient les fluctuations du marché. L'allocation évolue progressivement selon les évolutions des marchés.
- La stratégie *Fixed-weight* (FW) est une stratégie dont l'objectif est de maintenir la répartition d'actif cible et, par conséquent, de maintenir les caractéristiques de risque du portefeuille conformes à la tolérance de l'investisseur. Cette stratégie contrarienne consiste à acheter des titres lorsque leurs prix baissent et à les vendre lorsqu'ils augmentent. Il existe plusieurs stratégies de rééquilibrage, par exemple :
  - Rééquilibrage calendaire : le rééquilibrage est effectué à une date précise (intervention hebdomadaire, mensuelle, trimestrielle, etc.)
  - Rééquilibrage conditionnel : le rééquilibrage est effectué lorsque les pondérations s'écartent de l'allocation cible, ou d'un certain pourcentage autour de cette dernière (il s'agit d'un intervalle d'inaction autour de la pondération cible). Par exemple, pour un portefeuille composé de 50% actions et 50% d'obligations, et avec un seuil à 5%, le rééquilibrage est effectué si le poids d'un des actifs est supérieur à 55% ou inférieur à 45%.

Avec une stratégie BH, le risque du portefeuille peut donc augmenter de manière significative avec le temps et modifier les caractéristiques initiales du portefeuille. Les pondérations du portefeuille sont finalement aléatoires dans une stratégie BH. Le graphique ci-après illustre les deux stratégies sur deux périodes :





**Figure 1:** Décomposition des stratégies BH et FW sur deux périodes de temps

Donc, pour la stratégie *Buy and Hold*, la fortune finale est de :

$$W_2^{BH} = W_0 [a_1(1 + r_{1,1})(1 + r_{1,2}) + a_2(1 + r_{2,1})(1 + r_{2,2})],$$

et pour la stratégie *Fixed-weight* :

$$\begin{aligned} W_2^{FW} &= W_1 [a_1(1 + r_{1,2}) + a_2(1 + r_{2,2})] \\ &= W_0 [a_1(1 + r_{1,1}) + a_2(1 + r_{2,1})] [a_1(1 + r_{1,2}) + a_2(1 + r_{2,2})] \end{aligned}$$

Les équations pour  $W_2^{BH}$  and  $W_2^{FW}$  peuvent facilement être généralisées pour plusieurs actifs et plusieurs périodes de temps.

Dans le cas de  $M$  actifs,  $a = (a_1, a_2, \dots, a_M)$  est le vecteur d'allocations,  $r_1 = (r_{1,1}, r_{2,1}, \dots, r_{M,1})$  et  $r_2 = (r_{1,2}, r_{2,2}, \dots, r_{M,2})$  sont les vecteurs de rendements pour la période 1 et 2. Nous dénotons par  $\odot$  la multiplication élément par élément.<sup>1</sup>

Nous obtenons donc dans le cas de  $M$  actifs :

$$\begin{aligned} W_2^{BH} &= W_0 [a'(1 + r_1) \odot (1 + r_2)], \\ W_2^{FW} &= W_0 [a'(1 + r_1) \cdot a'(1 + r_2)]. \end{aligned}$$

Après développement, nous avons :

$$W_2^{FW} - W_2^{BH} = W_0 [(a' r_1)(a' r_2) - a'(r_1 \odot r_2)].$$

<sup>1</sup>Pour deux vecteurs nous avons  $(a_1, a_2) \odot (x_1, x_2) = (a_1 x_1, a_2 x_2)$ .

Et donc la différence entre les deux stratégies peut être exprimée comme suit :

$$D = W_2^{FW} - W_2^{BH} = -a_1 a_2 W_0 (r_{11} - r_{21})(r_{12} - r_{22}). \quad (1)$$

Cette formule théorique montre notamment que la stratégie FW est supérieure à celle de BH lorsque les différentiels d'écart de rendement sont négatifs. De plus, cette formule implique plusieurs propriétés supplémentaires à prendre en compte dans le choix d'une stratégie de rééquilibrage :

**Propriété 1.** *Le différentiel  $W_2^{FW} - W_2^{BH}$  est le plus large pour les portefeuilles à pondérations égales, c'est-à-dire lorsque  $a_1 = a_2 = 1/2$ .*

Preuve :  $a_2 = 1 - a_1$  donc,  $a_1 a_2 = a_1 - a_1^2$ . La maximisation donne donc  $a_1 = 1/2$ .

**Propriété 2.** *Supposons que le premier actif soit l'actif sans risque, c'est-à-dire un actif avec une volatilité nulle, et que l'on note  $r_1 = r_f$ . Le deuxième actif est un actif risqué avec un rendement aléatoire de  $r$ . Si l'autocorrélation de  $r$  est égale à zéro, la stratégie BH a une valeur attendue plus élevée que celle de la stratégie FW. Si  $\mu = E[r]$  et  $\sigma^2 = V[r]$  représente respectivement le rendement attendu et la variance et  $\rho_{1,2}$  l'autocorrélation de l'actif risqué, alors :*

$$E[D] = -a_1 a_2 \{\rho_{1,2} \sigma^2 + (\mu - r_f)^2\} \quad (2)$$

Preuve : Soit  $D = (W_2^{FW} - W_2^{BH})/W_0 = -a_1 a_2 (r_1 - r_f)(r_2 - r_f)$ .

$$\begin{aligned} E[D] &= -a_1 a_2 E[(r_1 - r_f)(r_2 - r_f)] \\ &= -a_1 a_2 \{E[r_1 r_2] - r_f E[r_1 + r_2] + r_f^2\} \\ &= -a_1 a_2 \{\rho_{1,2} \sigma^2 + (\mu - r_f)^2\}. \end{aligned}$$

Par conséquent, si la corrélation est nulle  $\rho_{1,2} = 0$  alors  $E[D] < 0$ , et  $E[W_2^{FW}] < E[W_2^{BH}]$  et donc la stratégie BH surperforme la stratégie FW.

Dans la pratique, les rendements des actions affichent des renversements de prix à court terme sur plusieurs semaines ou quelques mois, entraînant une autocorrélation négative, et du momentum à plus long terme. Cette observation suggère qu'à long terme, une stratégie BH devrait générer une performance supérieure à celle d'une stratégie FW. L'intuition de ce résultat est que le rééquilibrage empêche les actifs performants de tirer pleinement parti de la hausse de prix ultérieure en cas de momentum persistant dans un marché haussier. Symétriquement, après une baisse des prix, le rééquilibrage augmente les proportions de l'actif risqué, ce qui entraînera une baisse de valeur ultérieure si le prix continue de chuter.

**Corollaire 1.** *Tant que  $\rho_{1,2} > -(SR)^2$  nous avons  $E[W_2^{FW}] < E[W_2^{BH}]$ .*

**Propriété 3.** *Le prix du risque (PR) du différentiel D ne dépend pas des poids du portefeuille.*

Pour rappel, le Sharpe Ratio (SR) et le Prix du Risque (PR) sont définis comme :

$$SR = \frac{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N R_i - r_f}{\sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (R_i - \bar{R})^2}} \quad \text{et} \quad PR = \frac{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N R_i}{\sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (R_i - \bar{R})^2}},$$

où  $R_i$  dénote le rendement annualisé et  $\bar{R}$  est la moyenne du rendement annualisé.

La propriété 3 implique qu'une modification du poids d'un portefeuille n'est pas suffisante pour modifier ses caractéristiques. Le gestionnaire devrait donc considérer un changement au niveau des actifs eux-mêmes et non pas de leurs poids.

**Propriété 4.** *Supposons que deux actifs risqués suivent une distribution gaussienne  $r_{1,t} - r_{2,t} \sim N(\mu, \sigma^2)$  pour  $t = 1, 2$ , et sont autocorrélés au degré  $\rho_{1,2}$ . Alors,*

$$E[W_2^{FW}] < E[W_2^{BH}] \text{ tant que } \rho_{1,2} > -(\mu/\sigma)^2.$$

Preuve :

$$\begin{aligned} E[(W_2^{FW} - W_2^{BH})/W_0] &= -a_1 a_2 E[(r_{1,1} - r_{2,1})(r_{1,2} - r_{2,2})] \\ &= -a_1 a_2 [Cov[r_{1,1} - r_{2,1}, r_{1,2} - r_{2,2}] + E[r_{1,1} - r_{2,1}]E[r_{1,2} - r_{2,2}]] \\ &= -a_1 a_2 [\rho_{1,2} \sigma^2 + \mu^2]. \end{aligned}$$

Et donc,  $E[W_2^{FW}] < E[W_2^{BH}]$  si  $\rho_{1,2} > -\mu^2/\sigma^2$ .

Cette dernière propriété montre que si l'autocorrélation des actifs n'est pas « significativement » négative, la stratégie BH génère une valeur attendue supérieure à celle de la stratégie FW. Selon les différentes propriétés, la surperformance d'une stratégie par rapport à l'autre reste ambiguë et cela pourrait donc expliquer pourquoi la littérature académique, abondante sur le sujet, ne tire pas de conclusions claires (voir introduction). Cependant, le risque du portefeuille peut augmenter de manière significative avec le temps si nous suivons une stratégie BH. Les actifs avec les meilleures performances domineront le portefeuille, ce qui entraînera une concentration des actifs, et réduira donc la diversification. De plus, comme les pondérations du portefeuille sont aléatoires dans une stratégie BH, le risque est accru. Dans ce contexte, il ne suffit pas de considérer le rendement attendu pour évaluer une stratégie par rapport à une autre, mais également le risque. Dans la prochaine section, nous procédons par simulations pour comprendre les conséquences des changements dans les paramètres des actifs.

### 3 Simulations

La section théorique nous donne plusieurs indications sur les types de simulations susceptibles d'être intéressants. De toute évidence, les coûts de transactions sont importants mais nous avons vu que les corrélations, tant dans le temps que dans la section transversale, jouent également un rôle significatif.<sup>2</sup> Nous avons donc voulu tester ces différents aspects, avec les paramètres de modélisation suivants :

- L'horizon de temps est de 1 an.
- Le montant initial investi est de 100 et le prix initial des deux actifs est de 10.
- Toutes les simulations sont effectuées 50'000 fois.
- Le rééquilibrage se fait de manière permanente.

#### 3.1 Portefeuille mixte (un actif sans risque et un actif risqué)

Les simulations sont d'abord effectuées sur un portefeuille mixte : l'actif 1 est l'actif sans risque avec un rendement annuel  $r_f$ , avec un prix initial fixé à  $B_0$ , et l'actif 2 est un actif risqué avec un rendement  $r_t$ , et un prix initial fixé à  $S_0$ . Nous supposons que la distribution est gaussienne avec les paramètres annuels  $\mu$  et la variance  $\sigma^2$ . Cet actif peut être autocorrélé avec le paramètre  $\rho_{1,2}$ . Le modèle choisi est le modèle autorégressif de degré 1, AR (1) :

$$r_{t+1} = m + \rho_{1,2}r_t + s\varepsilon_{t+1}, \quad \text{avec } \varepsilon_{t+1} \sim \mathcal{N}(0, 1). \quad (3)$$

Une fois l'évolution des rendements obtenue, il est possible de déterminer les prix finaux de ces derniers tels que :

$$S_T = S_0(1 + r_1)(1 + r_2) \cdots (1 + r_T) \quad \text{pour les actions, et,}$$
$$B_T = B_0(1 + r_f)^T \quad \text{pour les obligations.}$$

La calibration numérique utilise comme benchmark un rendement sans risque de  $r_f = 2\%$  et un rendement prévu de  $\mu = 5\%$  pour l'actif risqué.

##### 3.1.1 Simulation 1 : Variation de l'allocation de l'actif risqué (20% à 90%)

Comme prévu, la stratégie BH génère des rendements moyens plus élevés, comme le montre la cinquième colonne du tableau, au fur et à mesure que nous augmentons la pondération de l'actif risqué. L'allocation FW génère des rendements moyens qui augmentent de manière similaire à la stratégie BH mais à moindres proportions. Concernant les ratios de Sharpe, nous remarquons que

---

<sup>2</sup>La méthodologie permettant d'intégrer les coûts de transactions peut être trouvée en annexe.

$a$	$\tau_B = \tau_S$	$\sigma$	acorr	BH	FW	BH	FW	SR	SR	SR	PR	PR	PR	TC		
				mean	mean	std	std	BH	FW	BH-FW	BH	FW	BH-FW	mean	min	max
<b>20%</b>	2%	25%	0	3%	2%	5%	5%	0.12	0.04	0.08	0.52	0.46	0.06	0.42%	0.13%	0.87%
<b>30%</b>	2%	25%	0	3%	2%	7%	8%	0.12	0.05	0.07	0.39	0.33	0.06	0.55%	0.16%	1.21%
<b>40%</b>	2%	25%	0	3%	3%	10%	10%	0.12	0.06	0.06	0.32	0.27	0.05	0.63%	0.15%	1.41%
<b>50%</b>	2%	25%	0	4%	3%	12%	13%	0.12	0.07	0.05	0.28	0.24	0.04	0.66%	0.17%	1.57%
<b>60%</b>	2%	25%	0	4%	3%	15%	15%	0.12	0.08	0.04	0.25	0.22	0.03	0.64%	0.19%	1.51%
<b>70%</b>	2%	25%	0	4%	4%	17%	18%	0.12	0.09	0.03	0.23	0.21	0.03	0.56%	0.15%	1.39%
<b>80%</b>	2%	25%	0	4%	4%	20%	20%	0.12	0.10	0.02	0.22	0.20	0.02	0.43%	0.07%	1.23%
<b>90%</b>	2%	25%	0	5%	4%	22%	23%	0.12	0.11	0.01	0.21	0.20	0.01	0.24%	0.06%	0.62%

**Tableau 1 : Variation de l'allocation de l'actif risqué**

La première colonne  $a$  représente la pondération de l'actif risqué,  $\tau_B = \tau_S$  représente les coûts de transaction en %,  $\sigma$  est la volatilité et acorr le degré d'autocorrélation de l'actif risqué. Nous utilisons également les notations suivantes; BH : *Buy and Hold*, FW : *Fixed-weight*, SR : *Sharpe-ratio*, PR : Prix du risque, TC : total des coûts de transaction, avec *mean* : moyenne et *std* : écart-type, et donc volatilité.

celui de la stratégie BH ne change pas, car les paramètres sont calibrés en fonction des rendements annuels donnés. Pour la stratégie FW, le ratio augmente avec la hausse du poids de l'actif risqué jusqu'à quasiment atteindre celui de la stratégie BH lorsque celui-ci est de 90%. Dans les cas extrêmes, où toute la fortune est investie dans l'actif risqué, les stratégies BH et FW sont quasi-identiques.

D'un autre côté, nous pouvons également remarquer que le prix du risque PR (qui diffère du SR car il ne prend pas en compte le taux sans risque) augmente également au fur et à mesure que le poids de l'actif risqué augmente, mais diminue lorsque celui-ci est supérieur ou égal à 60%. Le risque n'est donc plus rémunéré avec une exposition risquée supérieure à 60% du portefeuille selon le PR ratio. La dernière colonne indique l'évolution des coûts de transaction. Nous remarquons qu'ils suivent une trajectoire concave avec un maximum atteint pour un portefeuille à pondération égale ( $a=50\%$ ). Cette dernière observation corrobore la propriété 1 de la section théorique.

### 3.1.2 Simulation 2 : Variation des coûts de transaction (3%, 4% et 5%)

$a$	$\tau_B = \tau_S$	$\sigma$	acorr	BH	FW	BH	FW	SR	SR	SR	PR	PR	PR	TC		
				mean	mean	std	std	BH	FW	BH-FW	BH	FW	BH-FW	mean	min	max
60%	<b>3%</b>	25%	0	4%	3%	15%	15%	0.12	0.06	0.06	0.25	0.20	0.05	0.96%	0.29%	2.49%
60%	<b>4%</b>	25%	0	4%	3%	15%	15%	0.12	0.04	0.08	0.25	0.18	0.07	1.27%	0.37%	3.48%
60%	<b>5%</b>	25%	0	4%	2%	15%	15%	0.12	0.02	0.10	0.25	0.16	0.09	1.59%	0.41%	4.38%

**Tableau 2 : Variation des coûts de transaction**

Vu qu'il n'y a pas de transactions effectuées dans la stratégie BH (le but étant de ne pas intervenir sur le portefeuille), les ratios de Sharpe (SR) et rendement-risque ratio (PR) ne varient pas tandis que ceux de la stratégie FW diminuent lorsque les coûts de transaction augmentent.

$a$	$\tau_B = \tau_S$	$\sigma$	acorr	BH	FW	BH	FW	SR	SR	SR	PR	PR	PR	TC		
				mean	mean	std	std	BH	FW	BH-FW	BH	FW	BH-FW	mean	min	max
60%	2%	<b>10%</b>	0	4%	4%	6%	6%	0.30	0.26	0.04	0.63	0.60	0.03	0.26%	0.07%	0.56%
60%	2%	<b>20%</b>	0	4%	3%	12%	12%	0.15	0.11	0.04	0.32	0.28	0.03	0.51%	0.13%	1.22%
60%	2%	<b>30%</b>	0	4%	3%	17%	18%	0.10	0.06	0.04	0.21	0.18	0.03	0.76%	0.21%	1.93%
60%	2%	<b>40%</b>	0	4%	3%	23%	24%	0.08	0.04	0.04	0.16	0.12	0.03	1.00%	0.27%	2.63%
60%	2%	<b>50%</b>	0	4%	3%	29%	30%	0.06	0.02	0.04	0.13	0.09	0.03	1.23%	0.36%	3.61%
60%	2%	<b>60%</b>	0	4%	2%	34%	36%	0.05	0.01	0.04	0.11	0.07	0.03	1.44%	0.48%	4.94%
60%	2%	<b>70%</b>	0	4%	2%	39%	42%	0.04	0.01	0.04	0.09	0.06	0.03	1.64%	0.50%	6.09%

Tableau 3 : Variation du niveau de volatilité

### 3.1.3 Simulation 3 : Variation de la volatilité (de 10% à 70%)

Nous observons que la croissance de la volatilité (troisième colonne  $\sigma$ ), et donc du risque, modifie les ratios de Sharpe des stratégies BH et FW mais que la différence entre les ratios reste constante. En cas de forte volatilité, il faut effectivement réaffecter des montants plus importants avec une stratégie de rééquilibrage, ce qui entraîne des coûts de transaction plus élevés. Durant les années "agitées", le coût total des transactions peut atteindre 4,9%.

### 3.1.4 Simulation 4 : Variation de l'autocorrélation (de -0.7 à +0.7)

$a$	$\tau_B = \tau_S$	$\sigma$	acorr	BH	FW	BH	FW	SR	SR	SR	PR	PR	PR	TC		
				mean	mean	std	std	BH	FW	BH-FW	BH	FW	BH-FW	mean	min	max
60%	2%	25%	<b>-0.7</b>	4%	5%	14%	15%	0.12	0.19	-0.07	0.25	0.33	-0.08	1.31%	0.28%	4.10%
60%	2%	25%	<b>-0.6</b>	4%	4%	15%	15%	0.12	0.16	-0.04	0.25	0.30	-0.04	1.16%	0.16%	3.03%
60%	2%	25%	<b>-0.4</b>	4%	4%	15%	15%	0.12	0.12	0.00	0.25	0.25	0.00	0.93%	0.19%	2.38%
60%	2%	25%	<b>-0.2</b>	4%	3%	15%	15%	0.12	0.09	0.03	0.25	0.23	0.02	0.77%	0.21%	1.82%
60%	2%	25%	<b>0</b>	4%	3%	15%	15%	0.15	0.08	0.04	0.25	0.22	0.04	0.64%	0.16%	1.59%
60%	2%	25%	<b>0.2</b>	4%	3%	15%	15%	0.12	0.07	0.05	0.25	0.21	0.04	0.53%	0.12%	1.41%
60%	2%	25%	<b>0.4</b>	4%	3%	15%	15%	0.12	0.07	0.05	0.25	0.21	0.05	0.43%	0.12%	1.33%
60%	2%	25%	<b>0.6</b>	4%	3%	15%	15%	0.12	0.07	0.05	0.25	0.20	0.05	0.35%	0.07%	1.26%
60%	2%	25%	<b>0.7</b>	4%	3%	15%	15%	0.12	0.07	0.05	0.25	0.20	0.05	0.30%	0.06%	1.26%

Tableau 4 : Variation de la persistance des rendements

Par construction, la moyenne et la volatilité de la stratégie BH sont les mêmes pour tous les modèles d'autocorrélation. Nous observons, comme indiqué dans la corollaire 1, que lorsque les rendements de l'actif oscillent, avec donc une autocorrélation significativement négative, la stratégie FW domine la stratégie BH. Comme le montrent les simulations, ce résultat reste valable même avec des coûts de transaction relativement importants de 2%.

## 3.2 Portefeuille avec deux actifs risqués

### Simulation 5 : Variations de l'autocorrélation et de la corrélation croisée dans le cas de deux actifs risqués

Les paramètres retenus pour les simulations sont identiques pour les deux actifs, c'est à dire :

- Nous supposons que le rendement est égal à 5% et la volatilité à 25% pour les deux actifs.

- Le poids de chacun des actifs est de 50%.
- Les coûts de transaction sont à 2%.

$\rho$	acorr	BH	FW	BH	FW	SR	SR	SR	PR	PR	PR	TC	TC	TC
		mean	mean	std	std	BH	FW	BH-FW	BH	FW	BH-FW	mean	min	max
-0.5	<b>-0.3</b>	5%	5%	12%	13%	0.24	0.26	-0.02	0.39	0.42	-0.03	1.52%	0.42%	3.32%
-0.25	<b>-0.3</b>	5%	5%	15%	15%	0.20	0.20	-0.01	0.32	0.33	-0.01	1.39%	0.40%	3.72%
0	<b>-0.3</b>	5%	5%	18%	18%	0.17	0.17	0.00	0.28	0.28	0.00	1.25%	0.37%	3.45%
0.25	<b>-0.3</b>	5%	5%	20%	20%	0.15	0.14	0.01	0.25	0.25	0.01	1.08%	0.30%	2.76%
0.5	<b>-0.3</b>	5%	5%	21%	22%	0.14	0.13	0.01	0.23	0.22	0.01	0.88%	0.19%	2.13%
-0.5	0	5%	4%	12%	13%	0.24	0.16	0.08	0.39	0.32	0.07	1.15%	0.29%	2.36%
-0.25	0	5%	4%	15%	15%	0.20	0.13	0.06	0.33	0.27	0.06	1.05%	0.23%	2.32%
0	0	5%	4%	17%	18%	0.17	0.12	0.05	0.28	0.24	0.05	0.94%	0.23%	2.41%
0.25	0	5%	4%	20%	20%	0.15	0.11	0.04	0.25	0.22	0.04	0.82%	0.22%	1.91%
0.5	0	5%	4%	22%	22%	0.14	0.11	0.03	0.23	0.20	0.03	0.66%	0.17%	1.56%
-0.5	<b>0.3</b>	5%	3%	12%	13%	0.23	0.10	0.13	0.39	0.27	0.13	0.87%	0.24%	2.29%
-0.25	<b>0.3</b>	5%	3%	15%	15%	0.19	0.10	0.10	0.33	0.23	0.09	0.79%	0.22%	1.95%
0	<b>0.3</b>	5%	4%	17%	18%	0.17	0.10	0.07	0.28	0.21	0.07	0.71%	0.20%	1.70%
0.25	<b>0.3</b>	5%	4%	19%	20%	0.15	0.10	0.05	0.25	0.20	0.05	0.61%	0.15%	1.56%
0.5	<b>0.3</b>	5%	4%	21%	22%	0.14	0.10	0.04	0.23	0.20	0.03	0.50%	0.12%	1.28%

**Tableau 5 : Variations de l'autocorrélation et corrélations par paire dans le cas de deux actifs risqués**

$\rho$  représente la corrélation entre les deux actifs risqués

La première colonne présente la corrélation entre les deux actifs. Cette colonne déterminera si les prix augmentent ou diminuent simultanément. Lorsque les actifs évoluent dans des directions différentes, cela modifiera plus fortement les allocations, ce qui entraînera un rééquilibrage accru et des coûts de transaction plus élevés. La seconde colonne indique l'autocorrélation des actifs et donc s'ils présentent un retour à la moyenne (*mean reversal*) ou du momentum sur la période de temps considérée. Lorsque les autocorrélations sont significativement négatives, les résultats valident la théorie, puisque la stratégie FW donne effectivement de meilleurs rendements ajustés aux risques malgré des coûts de transactions élevés.

Finalement, le choix de la stratégie dépend principalement de l'évolution des actifs et la prévisibilité des titres peut donc jouer un rôle important. En effet, si certains indicateurs avancés donnent des anticipations sur les mouvements futurs des titres, la stratégie de rééquilibrage peut être adaptée pour donner de meilleurs résultats.

## 4 Prévisibilité des rendements

Il existe de nombreuses études soutenant l'idée que les rendements des actifs peuvent être prédits (voir par exemple *Barberis (2000)*, *Campbell et Thompson (2007)*, et *Cochrane (2007)*). Même si cette question est controversée (*Bali et al. (2017)*), il est intéressant de rechercher de manière empirique les implications de la prévision des rendements dans une stratégie de rééquilibrage.

### 4.1 Cadre théorique

Si les rendements des actifs sont partiellement prévisibles, par exemple par le ratio dividende sur prix,  $dp$ , et que ce dernier indique une future hausse des rendements des actifs risqués, alors le gestionnaire a deux possibilités pour profiter de la hausse : décider de rééquilibrer le portefeuille seulement lorsque le poids atteint  $a + \delta$  (et laisser donc un intervalle d'inaction) ou changer l'allocation  $a$  dans son complet (et donc changer l'allocation cible dans son entier vers une nouvelle allocation, disons  $a'$ ). La première possibilité suggère donc de modéliser  $\delta$  en fonction de  $dp$ , et la deuxième, de modéliser directement  $a'$  en fonction de  $dp$ .

Pour modéliser les marges autour de l'allocation cible avec  $\delta$  dépendante de  $dp$  du mois précédent, nous supposons que  $\delta$  est compris entre  $\delta_{\min}$  et  $\delta_{\max}$ . Une spécification possible est la suivante :

$$\delta_t = \delta_{\min} + (\delta_{\max} - \delta_{\min}) \frac{\exp(a dp_t + b)}{1 + \exp(a dp_t + b)}.$$

Les détails pour la calibration de  $a$  et  $b$  peuvent être trouvés en annexe.

Pour étudier les conséquences de la modification de l'allocation  $a$  lorsque  $dp$  varie, nous suivons une approche similaire et supposons que l'allocation  $a$  évolue entre les limites  $a_{\min}$  et  $a_{\max}$ , et peut être modélisée ainsi :

$$a_t = a_{\min} + (a_{\max} - a_{\min}) \frac{\exp(a dp_t + b)}{1 + \exp(a dp_t + b)}.$$

Nous supposons que la proportion de l'actif risqué est de 60% pour le benchmark. Dans le cas où l'allocation varie en fonction du ratio  $dp$ , nous supposons que  $a_{\min}$  et  $a_{\max}$  sont respectivement de 80% et 120%. Concernant l'évolution des prix et dividendes, nous utilisons le modèle suivant et supposons un portefeuille mixte composé d'un actif risqué ainsi que d'un actif sans risque. En



paramétrant  $\Delta = 1/12$  pour un incrément de temps mensuel, nous avons :

$$r_{B,t} = (1 + r_f)^\Delta - 1, \text{ le rendement de l'actif sans risque,}$$

$$r_{S,t} = \mu_{S,t}\Delta + \sigma_S \sqrt{\Delta}\varepsilon_{S,t}, \text{ le rendement de l'actif risqué,}$$

$$\mu_{S,t} = \alpha + \beta dp_t, \text{ où } dp_t \equiv D_t/S_t,$$

$$dp_t = \gamma + \phi dp_{t-1} + \sigma_{dp} \varepsilon_{dp,t} \text{ le ratio dividende sur prix,}$$

avec  $D_t$  : le montant des dividendes générés au cours du mois  $t - 1$  et versés au temps  $t$ . Le paramètre  $\rho_{D,S}$  représente la corrélation entre  $\varepsilon_{dp,t}$  et  $\varepsilon_{S,t}$ , qui est supposée constante.

Pour le calibrage, nous suivons *Barberis (2000)* qui utilise des données mensuelles pour la période allant de janvier 1927 à décembre 1995.

Nous effectuons 50'000 simulations avec un horizon de temps d'une année, un taux annuel sans risque de 2% et une volatilité annuelle de l'actif risqué de 25%.

Le tableau 6 présente les résultats et chaque ligne décrit les variations des paramètres de cet exercice ceteris-paribus. L'indice 2 présente le cas où  $\delta$  varie, et l'indice 3 celui où l'allocation  $a$  entière change pour  $a'$ .

	SR BH <sub>1</sub>	SR FW <sub>1</sub>	TC mean	SR FW <sub>2</sub>	SR FW <sub>2</sub> -FW <sub>1</sub>	TC2 mean	SR FW <sub>3</sub>	SR FW <sub>3</sub> -FW <sub>1</sub>	TC3 mean
Benchmark	0.09	0.05	0.67%	0.09	0.04	0.06%	0.03	-0.02	1.19%
Augmenter $\tau_B = \tau_S$ à 0.04 (coûts de transaction)	0.09	0.01	1.33%	0.08	0.07	0.11%	-0.05	-0.05	2.36%
Augmenter $\sigma$ de 0.25 à 0.4 (volatilité)	0.05	0.01	1.07%	0.04	0.03	0.24%	0.00	-0.01	1.57%
Changer $\alpha$ de -0.006 à -0.007 (baisse du rendement attendu)	0.03	-0.01	0.67%	0.02	0.04	0.06%	-0.03	-0.02	1.18%
Augmenter $\beta$ de 0.26 à 0.31 (prédictibilité)	0.17	0.14	0.67%	0.17	0.03	0.06%	0.12	-0.02	1.19%
Baisser $\varphi$ de 0.98 to 0.78 (persistance)	-0.33	-0.37	0.65%	-0.33	0.04	0.07%	-0.46	-0.10	2.24%
Augmenter $\sigma_x$ de 0.0017 à 0.0021 (incertitude)	0.08	0.04	0.67%	0.08	0.04	0.05%	0.03	-0.02	1.18%
Augmenter $\rho_x$ de -0.94 à -0.6 (corrélation)	0.08	0.04	0.67%	0.08	0.04	0.06%	0.03	-0.01	1.09%

**Tableau 6 : Effets des variations des paramètres de simulations dans un modèle de prévision**

De manière générale, nous remarquons qu'une stratégie de rééquilibrage avec des marges ( $\delta$ ) dépendantes du ratio dividende sur prix  $dp$  donne de meilleurs résultats ( $FW_2$ ) qu'un simple rééquilibrage, notamment grâce à une baisse des coûts de transaction. En effet, pour toutes les variations de paramètres étudiées, les ratios de Sharpe de la deuxième stratégie de rééquilibrage sont les plus élevés, et atteignent presque ceux de la stratégie BH. Cette hausse est d'autant plus significative pour les cas suivants : hausse des coûts de transaction, baisse du rendement attendu, hausse de l'incertitude, et hausse de la corrélation.

Par contre, forcer une allocation différente (stratégie 3) peut être coûteux, et donne de moins

bons rendements ajustés au risque. Après tout, le potentiel de prévision reste faible et forcer une réallocation en raison d'un changement supposé dans les rendements attendus peut être risqué. La baisse est particulièrement forte dans le cas où les rendements attendus sont moins stables ( $\sigma$  qui baisse de 0.98 à 0.78).

Les résultats des modèles de simulation nous ont donné quelques indications pour choisir la meilleure stratégie. Il serait intéressant de confronter ces résultats avec ceux des données réelles en effectuant des *backtesting*.

## 5 *Backtesting* sur données réelles

Dans cette section, nous présentons les résultats d'un portefeuille modèle d'une caisse de pension suisse avec l'allocation suivante : 5% au taux d'intérêt journalier suisse, 5% de taux interbancaire suisse à 3 mois, 20% d'obligations allemandes à 10 ans, 30% d'obligations suisses à 10 ans, 10% dans le CAC français, 5% dans le DAX allemand, 10% dans le SMI suisse, 5% dans le FTSE britannique, et 10% dans le S&P500.

Les données couvrent la période suivante : du 1er janvier 1999 au 1er septembre 2016, sont mensuelles et proviennent de Datastream.

Les principales statistiques descriptives peuvent être trouvées sur le tableau 7.

	$a(\%)$	moyenne	écart-type	min	max
<i>SWI ON</i>	5	0.60	0.36	-0.42	0.29
<i>SWI 3M IB</i>	5	0.82	0.34	-0.13	0.29
<i>Bund 10Y CHF</i>	20	1.17	6.44	-12.44	7.11
<i>SWI 10Y</i>	30	1.98	0.33	-0.05	0.34
<i>R CAC CHF</i>	10	0.71	20.77	-18.83	15.99
<i>R DAX CHF</i>	5	4.87	23.60	-21.11	22.73
<i>R SMI</i>	10	1.80	14.60	-14.86	12.99
<i>R FTSE CHF</i>	5	-0.94	16.79	-16.36	15.34
<i>R SP500 CHF</i>	10	2.89	17.68	-14.09	12.93

**Tableau 7 : Statistiques descriptives des actifs du portefeuille**

Les notations sont les suivantes : *SWI ON* est le taux d'intérêt au jour le jour suisse, *SWI 3M IB* est le taux interbancaire suisse à 3 mois, *Bund 10Y* est l'obligation allemande à long terme de 10 ans, *SWI 10Y* est l'obligation à long terme suisse à 10 ans, *R CAC CHF* est l'indice français CAC40 en francs suisses, *R DAX CHF* est l'indice allemand DAX en francs suisses, *R SMI* est l'indice suisse SMI, *R FTSE CHF* est le FTSE britannique en francs suisses et *R SP500 CHF* est l'indice américain SP500 en francs suisses.

Nous avons pu voir dans la section théorique que les corrélations, tant à travers le temps que dans la section transversale, sont des éléments importants à prendre en compte pour définir la stratégie. Le tableau suivant présente la matrice des corrélations et des autocorrélations le long de la diagonale de la matrice.

	ON	3M	B10Y	S10Y	CAC	DAX	SMI	FTSE	SP500
<i>SWI ON</i>	<b>0.88</b>	0.93	0.08	0.80	-0.09	-0.10	-0.10	-0.11	-0.12
<i>SWI 3M IB</i>	0.93	<b>0.99</b>	0.07	0.83	-0.09	-0.10	-0.10	-0.12	-0.13
<i>Bund 10Y CHF</i>	0.08	0.07	<b>-0.17</b>	0.08	0.45	0.39	0.26	0.45	0.41
<i>SWI 10Y</i>	0.80	0.83	0.08	<b>0.99</b>	-0.04	-0.05	-0.07	-0.07	-0.12
<i>R CAC CHF</i>	-0.09	-0.09	0.45	-0.04	<b>0.02</b>	0.93	0.80	0.88	0.79
<i>R DAX CHF</i>	-0.10	-0.10	0.39	-0.05	0.93	<b>0.05</b>	0.77	0.83	0.79
<i>R SMI</i>	-0.10	-0.10	0.26	-0.07	0.80	0.77	<b>0.12</b>	0.78	0.76
<i>R FTSE CHF</i>	-0.11	-0.12	0.45	-0.07	0.88	0.83	0.78	<b>0.07</b>	0.86
<i>R SP500 CHF</i>	-0.12	-0.13	0.41	-0.12	0.79	0.79	0.76	0.86	<b>0.04</b>

**Tableau 8 : Tableaux d'autocorrélations (diagonales) et corrélations par paire d'actifs du portefeuille modèle**

Les taux d'intérêt et les actifs risqués ont tendance à être corrélés négativement (par exemple le SMI et le taux interbancaire suisse sont dé-corrélés à -0.10). Concernant les autocorrélations, nous remarquons la persistance élevée des taux d'intérêt suisses avec des autocorrélations supérieures à 0.88. Les indices boursiers sont moins persistants puisqu'ils présentent des coefficients d'autocorrélations faibles. Le marché boursier présentant la persistance la plus élevée est le marché suisse (avec une autocorrélation à 0.12). La persistance du marché suisse est principalement due à la taille relativement petite de ce dernier. A priori, il semble délicat de prédire si une stratégie BH ou FW domine sur la période considérée à la simple observation des corrélations et autocorrélations de ce portefeuille.

Finalement, il s'avère que la stratégie BH est dominée par la stratégie de rééquilibrage FW. En effet, sans coûts de transaction et avec une fortune initiale de 100 au 1er janvier 1999, un investisseur aurait atteint une fortune de 119.8 au 1er septembre 2016 s'il avait suivi une stratégie BH, et 127.3 avec une stratégie FW, avec un rééquilibrage mensuel.

Avec l'introduction des coûts de transaction, de 50 pb, 1% et 2%, nous constatons que c'est uniquement avec un coût de transaction relativement élevé de 2% pour chaque actif que la stratégie FW donne de moins bons résultats que la stratégie BH. En pratique, le coût de transaction s'élève à environ 1% et une stratégie à pondération fixe devient donc intéressante d'après ce *backtesting*.

Nous avons également voulu déterminer si la surperformance de la stratégie FW est une caractéristique permanente, et durable, des données ou si elle évolue dans le temps. Pour ce faire, nous avons décomposé l'échantillon par année comme le montre le tableau 9. Nous remarquons que lorsque la stratégie de rééquilibrage est meilleure sur une année, la surperformance est telle qu'elle ne peut être compensée les années suivantes. Sur la figure ci-après, nous pouvons voir que

cette surperformance est d'autant plus importante sur les dernières années.

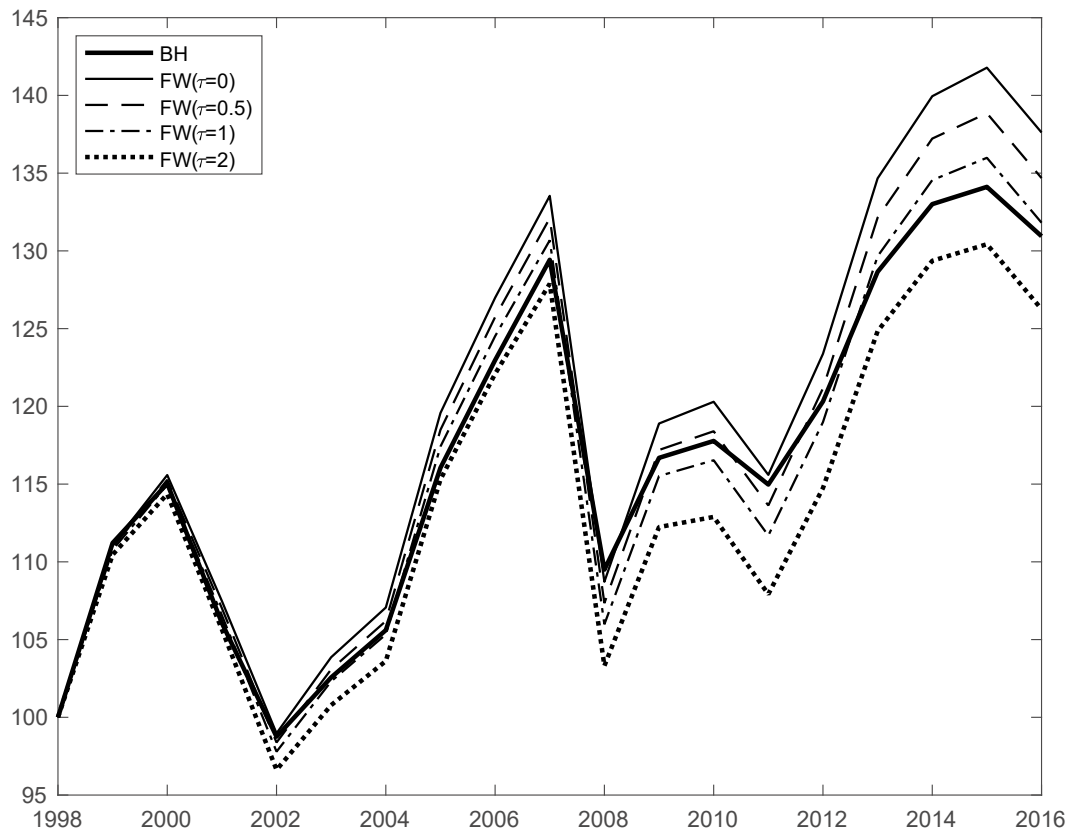
Comme les résultats le démontrent, il est nécessaire de rester cohérent dans le temps dans la politique de répartition du portefeuille sans informations supplémentaires.

Enfin, nous avons également tenté d'expliquer le succès de la stratégie FW en examinant la relation entre volatilité et performance mais les résultats, non présentés, n'ont pas permis de mettre en évidence un lien pertinent.

Echantillon	$\tau=0\%$		$\tau=0.5\%$		$\tau=1.0\%$		$\tau=2\%$	
	$W^{BH}$	$W^{FW}$	VtF1	TC1	VtF2	TC2	VtF3	TC3
Total	119.8	127.3*	124.6	2.4	121.9	4.8	116.8	9.4
1999	111.1*	110.9	110.7	0.1	110.6	0.3	110.3	0.6
2000	102.4	102.9*	102.7	0.1	102.6	0.3	102.4	0.5
2001	92.7*	92.5	92.3	0.2	92.2	0.3	91.9	0.6
2002	92.3*	92.0	91.9	0.2	91.7	0.3	91.4	0.6
2003	105.5	106.0*	105.9	0.1	105.7	0.3	105.4	0.6
2004	102.6*	102.6*	102.6*	0.1	102.5	0.1	102.4	0.3
2005	112.5*	112.1	112.0	0.1	111.9	0.2	111.6	0.4
2006	106.9*	106.8	106.7	0.1	106.7	0.1	106.5	0.3
2007	105.9*	105.9*	105.8	0.1	105.7	0.2	105.5	0.4
2008	82.5*	80.0	79.9	0.2	79.7	0.3	79.4	0.7
2009	108.7	109.2*	109.0	0.2	108.8	0.3	108.4	0.7
2010	98.2	98.5	98.3*	0.1	98.2	0.3	97.9	0.6
2011	94.5	94.9	94.7*	0.1	94.6	0.3	94.3	0.5
2012	106.3*	106.3*	106.2	0.1	106.1	0.2	105.9	0.4
2013	109.8*	109.5	109.5	0.1	109.4	0.2	109.2	0.3
2014	103.5*	103.5*	103.4	0.1	103.3	0.1	103.2	0.3
2015	99.0	99.4*	99.3	0.1	99.2	0.3	98.9	0.5
2016	97.1	97.2*	97.1	0.1	97.1	0.1	96.9	0.3

**Tableau 9 : Résultat du *backtesting***

Pour toutes les allocations, la richesse initiale est de 100.  $W^{BH}$  représente la fortune finale pour une stratégie *Buy and Hold* et  $W^{FW}$  représente la fortune finale pour une stratégie *Fixed-weight*, dans laquelle le portefeuille est rééquilibré tous les mois. Dans les colonnes  $VtF1$  et  $TC1$ , nous retrouvons les résultats de la stratégie *Fixed-weight* avec un coût de transaction proportionnel de 0,5%. Sur les colonnes  $VtF2$  et  $TC2$ , nous retrouvons les résultats d'une stratégie impliquant un coût de transaction de 1% et, enfin, les deux dernières colonnes  $VtF3$  et  $TC3$  présentent la fortune finale avec un coût de transaction de 2% pour tous les actifs. La première ligne présente les résultats pour toute la période 1999-2016. La stratégie avec la valeur terminale la plus élevée est indiquée grâce à une étoile \*.



**Figure 2:** Evolution de la fortune du portefeuille selon les différentes stratégies

## 6 Conclusion

Ce document aborde les questions de savoir pourquoi et sous quelles conditions une stratégie de rééquilibrage peut être bénéfique. Nous avons introduit une méthodologie pour prendre en compte les coûts de transaction et effectué plusieurs expériences de simulation afin de quantifier la pertinence de ces derniers. Nous avons également validé notre méthodologie en l'appliquant à des données réelles dans un portefeuille modèle.

Tout d'abord, les résultats montrent qu'une stratégie de rééquilibrage peut être préconisée à des investisseurs averses au risque car elle semble réduire la volatilité dans la majorité des cas. En effet, les rendements ajustés aux risques peuvent être plus élevés grâce à une stratégie FW. Ce premier résultat corrobore les études antérieures.

La principale conclusion concerne l'importance des autocorrélations d'actifs ainsi que les corrélations croisées dans un portefeuille pour le choix d'une stratégie d'investissement. Nous observons que la stratégie à pondération fixe domine la stratégie *Buy and Hold* lorsque les actifs présentent un fort retour à la moyenne (*mean reversion*) et lorsque les actifs sont significativement dé-corrélés. Cela signifie qu'à *contrario*, lorsque le marché présente du momentum, il est préférable d'opter pour une stratégie *Buy and Hold*.

Nous remarquons donc que la surperformance de la stratégie FW dépend principalement de l'évolution des marchés (avec l'importance des corrélations et autocorrélations). Par conséquent, la prévisibilité des rendements des actifs peut aider dans le choix de la stratégie. En effet, si l'investisseur anticipe des rendements futurs positifs, il peut décider de ne pas rééquilibrer immédiatement son portefeuille et ainsi profiter de la hausse. Nos résultats indiquent que, dans ce cas, il peut être utile d'introduire un intervalle d'inaction autour du poids cible et d'intervenir seulement lorsque les marges de cet intervalle sont atteintes. Ces dernières peuvent être définies en fonction des résultats des modèles de prévisions, qui peuvent être étudiés grâce à des indicateurs avancés de type ratio dividende sur prix. D'un autre côté, nous avons montré que changer l'allocation entière en fonction des anticipations de marché, et pas seulement les marges autour de la pondération cible, peut être très coûteux.

Par ailleurs, nos résultats des *backtestings* avec les données réelles montrent que la stratégie de rééquilibrage FW est préférable à la stratégie *Buy and Hold* pour des coûts de transaction relativement faibles (à moins de 2%) pour un portefeuille modèle équilibré. Sur la période considérée (de 1999 à 2016), cette surperformance est d'environ 7% lorsque les coûts de transaction sont nuls, 4% avec des coûts de transaction de 0.5%, et 1% pour des coûts de

transaction d'1%.

Enfin, il peut être utile de rappeler que les stratégies de rééquilibrage permettent d'exclure toutes les émotions et jugements subjectifs pour les décisions d'achat et de vente et d'éviter ainsi tout biais.

## Annexe 1 : Méthodologie pour l'intégration des coûts de transaction

Nous notons le prix de l'actif  $i = 1, \dots, M$  au temps  $t$  par  $S_{i,t}$ . Soit  $\theta_{i,t}$  le nombre d'unités de l'actif  $i$  au moment  $t$  dans un portefeuille. Le portefeuille est implémenté à  $t = 0$  et peut être rééquilibré aux temps  $1, 2, \dots$ . L'indice  $i = 1$  peut être utilisé pour l'actif sans risque, auquel cas nous pouvons remplacer  $S_{1,t}$  par  $B_t$ . La valeur d'un portefeuille à l'instant  $t$  est indiquée par  $V_t$ . Nous définissons  $\tau_i$  pour  $i = 1, \dots, M$  les coûts de transaction que nous supposons proportionnels à la valeur des actifs échangés. L'investisseur rééquilibrera son portefeuille à la date  $t$ . Avant le rééquilibrage, que nous notons  $t-$ , les prix sont supposés connus et la modification du portefeuille aura lieu instantanément et sans incidence sur les prix, de sorte que juste après le rééquilibrage, au moment  $t$ , la valeur du portefeuille évolue telle que :

$$V_t = V_{t-} - \text{coûts de transactions.}$$

La valeur du portefeuille avant le rééquilibrage est :

$$V_{t-} = \sum_{i=1}^M \theta_{i,t-1} S_{i,t}.$$

Les coûts de transaction pour l'actif  $i$  sont exprimé par  $|\theta_{i,t} - \theta_{i,t-1}| S_{i,t} \tau_i$ . Donc,

$$V_t = V_{t-} - \sum_{i=1}^M |\theta_{i,t} - \theta_{i,t-1}| S_{i,t} \tau_i.$$

Après rééquilibrage, l'actif  $i$  devrait avoir un poids équivalent à  $a_{i,t}$  qui est donné de manière exogène. Cette allocation  $a_{i,t}$  peut être fixe ou varier dans le temps. La problématique est : comment modifier  $\theta_{i,t}$  pour  $i = 1, \dots, M$  afin que la proportion  $a_{i,t}$  soit maintenue après avoir tenu compte des frais de transaction.

Par définition :

$$a_{i,t} = \frac{\theta_{i,t} S_{i,t}}{V_t}.$$

Donc,

$$\theta_{i,t} S_{i,t} = a_{i,t} V_t = a_{i,t} \left[ V_{t-} - \sum_{i=1}^M |\theta_{i,t} - \theta_{i,t-1}| S_{i,t} \tau_i \right], \quad \text{pour } i = 1, \dots, M. \quad (4)$$

En l'absence de valeurs absolues, cet ensemble d'équations donnerait un système de  $M$  équations avec  $M$  inconnues et serait trivial à résoudre. Dans le cas de deux actifs, les signes de changement



de poids sont facile à déterminer; mais dans le cas général, l'analyse est plus évoluée. Puisque :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x > 0, \\ -x & \text{alors,} \end{cases}$$

Il est possible de réécrire la valeur de  $x$  après l'introduction d'une variable auxiliaire désignée par  $e$  tel que  $|x| = e x$  avec  $e = 1$  si  $x > 0$ , et  $e = -1$  si  $x \leq 0$ . Nous introduisons donc à chaque période, lorsque le portefeuille doit être rééquilibré, un ensemble de  $M$  variables  $e_i \in \{+1, -1\}$ . Nous résolvons le système pour un ensemble de ces  $e_i$ , résultant en un ensemble de  $\theta_{i,t}$ . Le changement de poids résultant  $\theta_{i,t} - \theta_{i,t-1}$  aura alors un signe positif ou négatif. Si les  $e_i$  couvrent l'ensemble des permutations possibles, nous obtenons un ensemble d'allocations potentielles. Il faut ensuite conserver la solution compatible avec les  $e_i$ , pour tous les  $i$ . En d'autres termes, les signes de changement de poids doivent être identiques à ceux de  $e_i$  pour tous les actifs. Avant de présenter la solution générale, nous abordons le cas pédagogique avec 2 actifs qui illustreront le fonctionnement de notre méthode.

L'équation peut être écrite telle que :

$$\begin{aligned} \theta_{1,t} S_{1,t} &= a_{1,t} [V_{t-} - |\theta_{1,t} - \theta_{1,t-1}| S_{1,t} \tau_1 - |\theta_{2,t} - \theta_{2,t-1}| S_{2,t} \tau_2], \\ \theta_{2,t} S_{2,t} &= a_{2,t} [V_{t-} - |\theta_{1,t} - \theta_{1,t-1}| S_{1,t} \tau_1 - |\theta_{2,t} - \theta_{2,t-1}| S_{2,t} \tau_2]. \end{aligned}$$

Il y a 4 cas donnés par les 2 signes possibles de  $\theta_{i,t} - \theta_{i,t-1}$ , et ceci pour les deux actifs. Si nous introduisons  $e_1$  et  $e_2$  et supposons que tous les actifs sont inclus dans le portefeuille,  $a_{it} \neq 0$ , cela donne :

$$\begin{aligned} \theta_{1,t} S_{1,t}/a_{1,t} &= V_{t-} - (\theta_{1,t} - \theta_{1,t-1}) S_{1,t} \tau_1 e_1 - (\theta_{2,t} - \theta_{2,t-1}) S_{2,t} \tau_2 e_2, \\ \theta_{2,t} S_{2,t}/a_{2,t} &= V_{t-} - (\theta_{1,t} - \theta_{1,t-1}) S_{1,t} \tau_1 e_1 - (\theta_{2,t} - \theta_{2,t-1}) S_{2,t} \tau_2 e_2. \end{aligned}$$

Ce système d'équations peut être réécrit en matrices :

$$\begin{pmatrix} S_{1,t}/a_{1,t} + S_{1,t} \tau_1 e_1 & S_{2,t} \tau_2 e_2 \\ S_{1,t} \tau_1 e_1 & S_{2,t}/a_{2,t} + S_{2,t} \tau_2 e_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_{1,t} \\ \theta_{2,t} \end{pmatrix} = (V_{t-} - \theta_{1,t-1} S_{1,t} \tau_1 e_1 - \theta_{2,t-1} S_{2,t} \tau_2 e_2) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ce système a génériquement une solution dans  $\theta_{1,t}$  et  $\theta_{2,t}$  puisque le déterminant de la matrice LHS est donné par :

$$\det \begin{vmatrix} S_{1,t}/a_{1,t} + S_{1,t} \tau_1 e_1 & S_{2,t} \tau_2 e_2 \\ S_{1,t} \tau_1 e_1 & S_{2,t}/a_{2,t} + S_{2,t} \tau_2 e_2 \end{vmatrix} = S_{1,t} S_{2,t} \left( \frac{1}{a_{1,t}} + \tau_1 e_1 \right) \left( \frac{1}{a_{2,t}} + \tau_2 e_2 \right) - S_{1,t} S_{2,t} \tau_1 \tau_2 e_1 e_2.$$

Puisque nous pouvons supposer que les prix des actifs sont différents de 0, ce déterminant est différent de 0 si

$$\left(\frac{1}{a_{1,t}} + \tau_1 e_1\right) \left(\frac{1}{a_{2,t}} + \tau_2 e_2\right) - \tau_1 \tau_2 e_1 e_2 \neq 0.$$

Mais ce sera le cas seulement si  $1 + a_{1,t}\tau_1 e_1 + a_{2,t}\tau_2 e_2 \neq 0$ . Cette condition peut être facilement vérifiée pour  $e_1$  et  $e_2$ . Une fois qu'une solution a été trouvée pour le système générant  $\theta_{1,t}$  et  $\theta_{2,t}$ , il est possible de déterminer les signes de  $\theta_{1,t} - \theta_{1,t-}$  et de  $\theta_{2,t} - \theta_{2,t-}$ . Si les signes coïncident avec les valeurs de  $e_1$  et  $e_2$ , la solution peut être conservée. Formellement, la fonction du signe peut être définie comme

$$\text{signe}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \\ -1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Donc, si

$$|\text{sign}(\theta_{1,t} - \theta_{1,t-}) - e_1| + |\text{sign}(\theta_{2,t} - \theta_{2,t-}) - e_2| = 0,$$

alors la solution sera acceptée.

Les lignes de la matrice suivante présentent tous les choix possible de signes :

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Une telle matrice peut facilement être construite en commençant par une matrice du type :

$$E' = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

et transformant simplement tous les 1 de  $E'$  en -1 et tous les 0 par  $E'$  en 1.

De manière similaire, nous pouvons reconnaître dans  $E'$  la représentation binaire des nombres 0, 1, 2, 3 =  $2^{M-1}$ . Ainsi, en transformant les entiers 0, 1, 2, 3 en leur représentation binaire, et en effectuant la transformation décrite ci-dessus, la matrice  $E$  est générée instantanément.<sup>3</sup>

---

<sup>3</sup>Évidemment, la matrice  $E'$  évolue de manière similaire à  $M$ . Cela signifie que notre méthode ne fonctionnera plus pour de très larges bases de données

Dans le cas général, la matrice se présentera comme suit, la dernière colonne représentant le nombre requis pour la représentation binaire :

$$E = \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 4 \\ & & & \text{etc.} & \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 2^{M-1} \end{array} \right].$$

Nous pouvons actuellement étendre la technique de résolution au cas général avec des actifs de  $M > 2$ . Soit  $e$  une ligne donnée de  $E$ . Donc  $e = (e_1, e_2, \dots, e_M)$ . L'équation (4) se généralise en :

$$a_{i,t} = \frac{\theta_{i,t} S_{i,t}}{V_t}.$$

Donc,

$$\theta_{i,t} S_{i,t} / a_{i,t} = V_{t-} - \sum_{j=1}^M (\theta_{j,t} - \theta_{j,t-}) S_{j,t} \tau_j e_j, \text{ for } i = 1, \dots, M,$$

donnant le système :

$$\theta_{i,t} S_{i,t} / a_{i,t} + \sum_{j=1}^M \theta_{j,t} S_{j,t} \tau_j e_j = V_{t-} + \sum_{j=1}^M \theta_{j,t-} S_{j,t} \tau_j e_j,$$

où nous remarquons que le RHS ne dépend pas de  $i$  et est donc une constante. Ce système peut être réécrit avec des matrices comme :

$$[\text{diag}(S_{1,t}/a_{1,t}, S_{2,t}/a_{2,t}, \dots, S_{M,t}/a_{M,t}) + (S_{1,t}\tau_1 e_1, S_{2,t}\tau_2 e_2, \dots, S_{M,t}\tau_M e_M) \otimes \mathbb{I}_M] \theta_t = (V_{t-} + \sum_{j=1}^M \theta_{j,t-} S_{j,t} \tau_j e_j) \otimes \mathbb{I}_M, \quad (5)$$

où  $\text{diag}(x)$  associe une matrice diagonale avec  $x$  sur la diagonale et 0 ailleurs.  $\otimes$  désigne le symbole de Kronecker. De plus,  $\mathbb{I}_M$  représente un vecteur  $M \times 1$  de 1. Pour chaque élément de  $E$ , nous calculons le vecteur  $\theta_t$  en résolvant le système multivarié (5). Finalement, pour le rééquilibrage au moment  $t$ , nous retenons le couple d'allocations  $\theta_t$  et le vecteur de signes  $e$  satisfaisant :

$$\sum_{j=1}^M |\text{sign}(\theta_{j,t} - \theta_{j,t-}) - e_j| = 0.$$

Il s'avère que pour toutes les simulations considérées, il n'y a toujours qu'une seule solution dans  $\theta_t$  satisfaisant cette condition.

## Annexe 2 : Calibration des paramètres $a$ et $b$ pour les marges de fluctuation autour des poids cibles et le changement d'allocation $a$

L'objectif de cette annexe est de fournir une spécification fonctionnelle du seuil d'inaction en fonction de certaines variables exogènes  $x$ . Et donc, de couvrir l'intervalle  $\delta_t \in [\delta_{\min}, \delta_{\max}]$ , tel que  $x$  décrit  $[x_{\min}, x_{\max}]$ .

Nous modélisons l'évolution de  $\delta$  en introduisant la transformation logistique comme suit :

$$\delta_x = \delta_{\min} + (\delta_{\max} - \delta_{\min}) \frac{\exp(ax + b)}{1 + \exp(ax + b)}.$$

Une question évidente est de savoir comment choisir  $a$  et  $b$ . Comme nous utilisons des simulations, il est possible de générer beaucoup de tirages pour  $x$  et de déterminer empiriquement son support. Notons  $x_{\min}$  et  $x_{\max}$  le  $k_{\min} = 1\%$  et  $k_{\max} = 99\%$  percentiles. La valeur de chacune de ces limites est obtenue par simulation et dépend du DGP.

Définissons,

$$y = \frac{\exp(ax + b)}{1 + \exp(ax + b)}.$$

L'algèbre linéaire implique :

$$ax + b = \ln \frac{y}{1 - y}.$$

Délimitons par :

$$Y_{\min} = \frac{y_{\min}}{1 - y_{\min}}, \quad Y_{\max} = \frac{y_{\max}}{1 - y_{\max}}.$$

Nous voulons sélectionner  $a$  et  $b$  pour que  $x_{\min}$  et  $x_{\max}$  correspondent également à  $y_{\min} = 1\%$  et  $y_{\max} = 99\%$  centiles de  $y$ . Puisque l'intervalle totale de  $y$  est  $[0,1]$ , cela signifie que  $y_{\min} = k_{\min} = 0,01$  et  $y_{\max} = k_{\max} = 0,99$ . Avec le choix ci-dessus, nous obtenons  $Y_{\min} = \ln(k_{\min}/k_{\max})$  et  $Y_{\max} = \ln(k_{\max}/k_{\min})$ .

Finalement :

$$a = \frac{Y_{\max} - Y_{\min}}{x_{\max} - x_{\min}}, \quad b = Y_{\min} - a x_{\min}.$$



## References

- Arnott, R. D. and Lovell, R. D. (1993). Rebalancing: Why? When? How often? *The Journal of Investing*, **2**(1), 5–10.
- Bali, T., Engle, R., and Murray, S. (2017). *Empirical Asset Pricing: The Cross Section of Stock Returns: An Overview*. John Wiley.
- Barberis, N. (2000). Investing for the long run when returns are predictable. *The Journal of Finance*, **55**(1), 225–264.
- Boulier, J. and Leclerc, C. (2000). Vertus et performance du rebalancement. In *Congres AFFI*.
- Campbell, J. Y. and Thompson, S. B. (2007). Predicting excess stock returns out of sample: Can anything beat the historical average? *The Review of Financial Studies*, **21**(4), 1509–1531.
- Cochrane, J. H. (2007). The dog that did not bark: A defense of return predictability. *The Review of Financial Studies*, **21**(4), 1533–1575.
- Donohue, C. and Yip, K. (2003). Optimal portfolio rebalancing with transaction costs. *The Journal of Portfolio Management*, **29**(4), 49–63.
- Dybvig, P. H. and Pezzo, L. (2019). Mean-variance portfolio rebalancing with transaction costs. Available at SSRN 3373329.
- Harjoto, M. A. and Jones, F. J. (2006). Rebalancing strategy for stocks and bonds asset allocation. *The Journal of Wealth Management*, **9**(1), 37–44.
- Holden, H. and Holden, L. (2013). Optimal rebalancing of portfolios with transaction costs. *Stochastics: An International Journal of Probability and Stochastic Processes*, **85**(3), 371–394.
- Leland, H. E. et al. (1996). *Optimal asset rebalancing in the presence of transactions costs*. Citeseer.
- Perold, A. F. and Sharpe, W. F. (1988). Dynamic strategies for asset allocation. *Financial Analysts Journal*, **44**(1), 16–27.
- Qian, E. E. (2019). *Portfolio Rebalancing*. CRC Press, Taylor & Francis Group.
- Sun, W., Fan, A., Chen, L.-W., Schouwenaars, T., and Albota, M. A. (2006). Optimal rebalancing for institutional portfolios. *The Journal of Portfolio Management*, **32**(2), 33–43.
- Tokat, Y. and Wicas, N. W. (2007). Portfolio rebalancing in theory and practice. *The Journal of Investing*, **16**(2), 52–59.
- Tsai, C. S.-Y. (2001). Rebalancing diversified portfolios of various risk profiles. *Journal of Financial Planning*, **14**(10), 104.



